CONCOURS D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Programme des épreuves écrites et orale :

I. Généralités :

- Vocabulaire de la théorie des ensembles, applications d'un ensemble dans un ensemble, composition des applications, restriction, application réciproque, image, image réciproque, application injective, surjective, bijective.
- Relations, relations d'équivalence, relations d'ordre.

II. Algèbre générale :

- Groupes, sous-groupe, classes d'équivalence modulo un sous-groupe, homéomorphisme, sous-groupes distingués, groupes quotients.
- Produit fini de groupes, groupe des permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique (décomposition d'une permutation en transposition, en cycles: signature d'une permutation), groupe alterné.
- Anneaux, règles de calcul dans un anneau, formule du binôme, sous-anneaux, homomorphismes d'anneaux idéaux dans un anneau commutatif, anneaux quotient, anneau commutatifs intègres.
- Corps, sous-corps, corps premier, caractéristique, corps des fractions d'un anneau commutatif intègre unitaire.
- Polynômes et fractions rationnelles, propriétés élémentaires de l'anneau K (X), avec K corps commutatif.
- Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (cas de R ou C).

III. Algèbre linéaire :

- Espaces vectoriels sur un corps commutatif, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, images, noyau.
- Espaces quotients, somme de sous-espaces, somme directe, produits d'espaces vectoriels.
- Espaces vectoriels de dimension finie, base, dimension, existence de supplémentaires.
- Rang d'une application linéaire, relation entre le rang et la dimension du noyau, espace dual, espace bi-dual, transposée d'une application linéaire, orthogonalité, base duale, rang de la transposée, isomorphisme canonique entre l'espace et son bi-dual.
- Matrices, opérations sur les matrices, matrice d'une application linéaire relativement à un choix de base, changement de base, de rang d'une matrice, rang de sa transposée.
- Déterminants, applications multilinéaires, formes linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n, déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée, matrice des cofacteurs, inverse d'une matrice.
- Équations linéaires, rang d'un système, comptabilité, méthodes pratiques de résolution.

- Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, théorème de Cayley-Hamilton, décomposition de l'espace en sous-espaces caractéristiques, diagonalisation, trigonalisation.

IV. Espaces vectoriels euclidiens :

- Rang d'une forme bilinéaire, forme bilinéaire non dégénérée, matrice d'une forme bilinéaire dans une base, changement de base, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique, vecteurs orthogonaux par rapport à une forme bilinéaire symétrique, noyau, éléments isotropes.
- bases orthogonales par rapport à une forme quadratique, décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés.
- Formes réelles positives, inégalité de Cauchy-Schwarz, formes positives non dégénérées.
- Espaces vectoriels euclidiens, produit scalaire, orthogonalité, norme, supplémentaires orthogonaux, bases orthonormales, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal, adjoint d'un endomorphisme, endomorphismes symétriques.

V. Topologie:

V.1 - Espaces métriques :

- Topologie d'un espace métrique. - Suites.
- Valeurs d'adhérence.
- Limites.
- Applications continues.
- Homéomorphismes.
- Compacité.
- Connexité.
- Composantes connexes. - Connexité par arcs.
- propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.
- Espaces métriques complets. - Théorème du point fixe.

V.2 - Espaces vectoriels normés sur R ou C :

- Topologie d'un espace vectoriel normé, normes équivalentes, cas des espaces de dimension finie, espaces de Banach, application bilinéaire continue, norme espace L. (E, F), des applications linéaires 3 continues, d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F.
- Dual topologique d'un espace vectoriel normé.

VI. Calcul différentiel :

- Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivée en un point, dérivée à gauche, à droite.
- Fonction dérivée, calcul des dérivées, dérivées d'une fonction composée, d'une fonction réciproque, dérivée d'ordre supérieur, dérivée n-ème du produit de deux fonctions dérivables, formules de Taylor (reste de Lagrange, reste de Young, reste sous forme intégrale), comparaison des fonctions au voisinage d'un point, développements limités.
- Applications de R" dans RP, dérivées partielles, matrice jacobienne, application au problème de changement de variables, dérivées partielles d'ordre supérieur, inversion de l'ordre des dérivations, formules des accroissements finis, formules de Taylor, fonctions implicites (existence, continuité, différentiation), théorème d'inversion locale.

VII. Calcul intégral :

- Intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Primitives d'une fonction continue (méthodes usuelles de calcul).
- Intégrales impropres.
- Intégrale de Lesbesgue sur R, mesure de Lesbesgue, ensembles et fonctions mesurables, ensemble de mesure nulle, convergence presque partout d'une suite de fonctions mesurables.
- Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.
- Continuité et dérivabilité d'intégrales dépendant d'un paramètre.
- Intégrales doubles et triples, formules ramenant leur calcul au calcul d'intégrales simples, calcul en coordonnées rectangulaires, polaires, cylindriques et sphériques.

VIII. Séries :

- Séries à termes réels ou complexes : convergence, somme, comparaison de deux séries, comparaison d'une série et d'une intégrale, convergence absolue, produit de deux séries absolument convergentes.
- Suites et séries de fonctions numériques, convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série, application à l'étude de la continuité, de la dérivabilité, de l'intégrabilité d'une fonction définie par une suite ou une série.
- Séries entières, rayon de convergence, somme et produit de deux séries entières, convergence uniforme : continuité, dérivées et primitives de la somme d'une série entière d'une variable complexe.
- Fonctions développables en série entière. Série de Fourier de fonctions périodiques d'une variable réelle à 4 valeurs complexes.
- Théorème de Dirichlet pour les fonctions de classe C' par morceaux, convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe C' par morceaux.
- Théorème de Parserval.
- Fonctions holomorphes, fonctions analytiques, théorème des résidus.

IX. Équations différentielles :

- Équations différentielles y' = F(y,x) où f est une application d'une partie de R2 dans R.
- Système différentiel linéaire, cas où les coefficients sont constants.
- Résolution des équations différentielles de type classique.
- X – Probabilités.
- Variables aléatoires, lois de probabilité, espérance, variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes.
- Exemples des lois : loi binomiale, loi de Poisson, loi uniforme, loi de Laplace-Gauss, loi exponentielle.